

--	--	--	--

(請填入甄選證號)

# 臺北市立第一女子高級中學

## 111學年度科學班甄選入學

### 數學科學能力檢定試題本

作答注意事項：

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

※請先確認你的答案卷、甄選證號與座位號碼是否一致無誤。

考試時間：80分鐘

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是數學科學能力檢定試題本，測驗時間從**13:30**到**14:50**，共**80**分鐘。作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

注意事項：

1. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。
2. 作答時不可使用量角器，如有攜帶附量角器功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
3. 依試場規則規定，答案卷上不得書寫姓名座號，也不得作任何標記。故意汙損答案卷、損壞試題本，或在答案卷上顯示自己身分者，該節甄試科目不予計分。
4. 每節甄試說明時間內，提前翻閱題本、提前作答，經制止不從者，該節甄試科目不予計分。
5. 每節甄試正式開始後15分鐘起，遲到者不得入場。若強行入場，該節甄試科目不予計分。
6. 每節甄試正式開始30分鐘內，不得提早離場。若強行離場，不服糾正者，該節甄試科目不予計分。

作答方式：

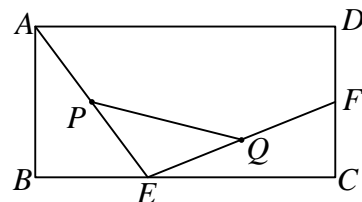
1. 題型包括選擇題、填充題與計算證明題。
2. 作答填充題時，請用藍色或黑色墨水的筆，依題號將解答寫在答案卷上相應的欄位內。
3. 作答計算證明題時，不必抄題。請依題號將解答過程及最後結果，用藍色或黑色墨水的筆清楚完整地寫在答案卷上相應的欄位內，切勿寫出欄位外。如需擬草稿，請使用試題本空白處。
4. 更正時請使用修正帶(液)修正後，重新書寫解答過程。

請聽到鐘(鈴)響起，於試題本右上角方格內填寫甄選證號，再翻頁作答



第一部份：單選題（第 1~4 題，每題 6 分，共 24 分）

1. 如下圖，已知矩形  $ABCD$ ， $E, F$  兩點分別在  $\overline{BC}$  邊與  $\overline{CD}$  邊上， $P, Q$  兩點分別是  $\overline{AE}, \overline{EF}$  的中點。若  $E$  點在  $\overline{BC}$  上由  $B$  點向  $C$  點移動，而  $F$  點不動，關於  $\overline{PQ}$  長度的敘述，下列敘述何者正確？



- (1)  $\overline{PQ}$  的長度逐漸變長
- (2)  $\overline{PQ}$  的長度變長後再逐漸變短
- (3)  $\overline{PQ}$  的長度逐漸變短
- (4)  $\overline{PQ}$  的長度變短後再逐漸變長
- (5)  $\overline{PQ}$  的長度不會改變

2. 小綠 連續放了好幾天的假期，在放假期間她利用每天上午與下午作了自然觀察筆記，發現了以下現象：

在假期之中一共下了七次雨，下了整個上午或整個下午。

若下午下雨時，當天的早上必是晴天。

已知這次假期天氣不是晴天就是雨天，且其中只有五天下午晴天、六天上午晴天。試問下列敘述何者正確？

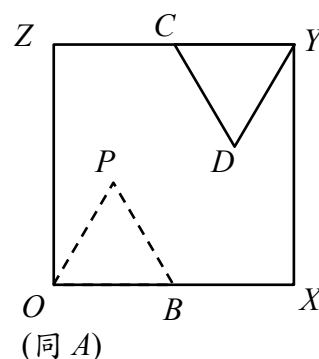
- (1) 若早上下雨時，當天下午也有下雨共有兩天
- (2) 若早上是晴天時，當天下午有下雨共有五天
- (3) 若早上下雨時，當天下午是晴天有三天
- (4) 若早上是晴天時，則當天下午也是晴天
- (5) 她一共放了十天的假期

3. 小芳、小莉、小花、小綠看了甲、乙兩袋的內容物後，各自描述如下：
- 小芳說：「我記得甲袋中裝的是黑球、乙袋中裝的是白球，嗯...，應該至少有一個是對的。」
- 小莉說：「我記得甲袋中裝的是黑球，但是乙袋中裝的不是白球！」
- 小花說：「小芳和小莉有一人說的是對的，一人說的是錯的！」
- 小綠說：「小芳、小莉和小花三人中只有一個人說的是對的！」
- 如果以上四人所述，只有兩人是正確的，試問下列選項何者正確？
- (1) 甲袋中裝的一定是黑球
  - (2) 甲袋中裝的一定不是黑球
  - (3) 乙袋中裝的一定是白球
  - (4) 乙袋中裝的一定不是白球
  - (5) 以上皆非
4. 小綠、小藍、小紅三人約好一起自助旅行，從起點到終點總長為 100 公里。小藍和小紅在出發時騎腳踏車以時速 25 公里從起點往終點前進；小綠則是從起點以時速 5 公里徒步出發。小藍和小紅騎了一段距離後，小藍改以時速 5 公里的速度徒步前進；同時小紅繼續騎腳踏車折返去找小綠，並且在找到小綠後兩人一起持續以時速 25 公里的速度朝終點前進。
- 若是最後三人同時抵達終點，則三人的這次 100 公里的交通時間總共歷時多久？
- (1) 5 小時
  - (2) 6 小時
  - (3) 7 小時
  - (4) 8 小時
  - (5) 以上皆非

第二部份：填充題（第 1~5 題，每題 10 分，共 50 分）

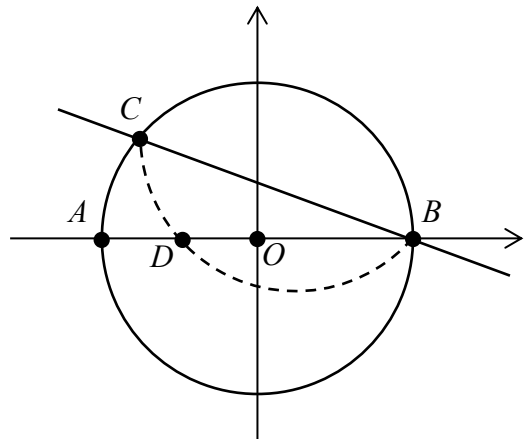
1. 若  $x$  為三位正整數，且  $x+3$  的各位數字和是  $x$  的各位數字和的三分之一，試列出所有符合前述條件的  $x$  值。

2. 將邊長為 2 的正三角形  $ABP$  放在邊長為 4 的正方形  $OXYZ$  內部轉動，按照下列操作：  
一開始將  $A$  和  $O$  重合、 $B$  放在  $\overline{OX}$  上，如圖中所示。  
先將三角形固定  $B$  點順時針轉動，然後將  $P$  轉到和  $X$  重合。  
再將三角形改成固定  $P$  點順時針轉動，然後將  $A$  轉到  $\overline{XY}$  上。  
依此類推沿正方形的邊繼續作同樣的轉動，直到三角形  $ABP$  和三角形  $CDY$  重合結束。  
若結束時  $P$  點位在  $Q$  點 ( $Q$  為  $C$ 、 $D$ 、 $Y$  三者其中之一)，並且  $P$  點從一開始到結束轉動所經的路途長度為  $s$ 。請寫出數對  $(Q, s)$ 。 ( $Q$  請寫出  $C$  或  $D$ 、或  $Y$ )



3. 已知  $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$  的其中兩根為  $\sqrt{2} - 1$  和  $-\sqrt{2} - 1$ ，試求出方程式  $8x^3 + 4ax^2 + 2bx - 2 = 0$  的所有根。

4. 如右圖，設兩點  $A(-4, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ， $O$  為原點，今以  $\overline{AB}$  為直徑作圓，過點  $B$  作一直線  $\overline{BC}$  交圓於  $C$  點，若以弦  $\overline{BC}$  為對稱軸將弧  $BC$  折疊與直徑  $\overline{AB}$  交於  $D$  點，若  $\overline{BD} = 6$ ，求  $C$  點坐標為何？

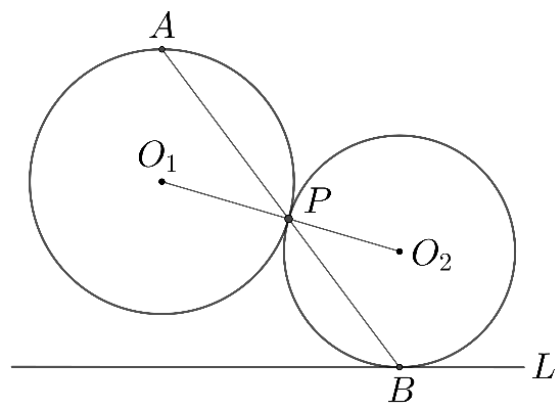


5. 已知正整數  $n$  使得  $n^2 + 2022n$  是完全平方數，則  $n$  的最大可能值為何？

第三部份：計算證明題（第 1~2 題，每題 13 分，共 26 分）

**注意**：各題均需詳細解釋或完整說明解題過程，只寫答案不予計分。

1. 平面上，圓  $O_1$  和圓  $O_2$  外切於  $P$  點， $A$  點在圓  $O_1$  上，直線  $L$  與圓  $O_2$  相切於  $B$  點，且  $A$ 、 $P$ 、 $B$  三點共線。已知  $\overline{AP} = 8$ ， $\overline{BP} = 7$ ，且圓  $O_1$  上的點到直線  $L$  的最短距離為 2，則連心線  $\overline{O_1O_2}$  長為何？



2. 數學老師給了小綠跟小青各一張卡片，每張卡片上都寫了三個非零整數。

已知：

小綠拿到的卡片上，三個數是公差為 10 的等差數列；

小青拿到的卡片上，三個數是公差為 11 的等差數列；

如果兩人拿到的卡片上，最小的數和最大的數之乘積剛好都是  $P$ ，試求  $P$  的所有可能值。

試 題 結 束